[*Auszug aus: W. Steinicke, Katalog heller Quasare und BL Lacertae Objekte, Freiburg 1984*]

# 2 Formeln und Definitionen

## 2.1 Das Hubble-Gesetz

Bekanntlich ist für kleine $z$ (bis $z \approx 0{,}4$) die Rotverschiebung proportional zur Entfernung $d$ (vgl. Voigt 1980):

(1) $$cz = H_0 d \qquad \text{mit } H_0 = 75\frac{km/s}{Mpc}$$

Dabei ist $c$ die Lichtgeschwindigkeit und $H_0$ der gegenwärtige Wert des Hubble-Parameters [1]) $H(t)$. Die Rotverschiebung $z$ bestimmt man aus dem Spektrum, die Entfernung $d$ ist dagegen keine Messgröße. Gemessen wird vielmehr die zur Entfernung proportionale scheinbare Helligkeit von Galaxien „gleicher" absoluter Helligkeit. Dazu nimmt man die (in ihrer Leuchtkraft vergleichbaren) hellsten Galaxien verschiedener Galaxienhaufen. Die Messgrenze liegt heutzutage bei etwa 20 mag (Beispiel: E-Galaxie 3C 295 mit 20,1 mag und $z = 0{,}461$). Trägt man die scheinbare Helligkeiten gegen die $z$-Werte auf (Hubble-Diagramm), so resultiert die lineare Beziehung (1), das Hubble-Gesetz. Quasare sind in diesem Diagramm nicht vertreten, da ihre absoluten Helligkeiten (unabhängig vom Hubble-Gesetz) nicht allgemein bekannt sind. Die Beziehung (1) ist nur für kleine $z$ ableitbar. Die Beschränkung ist wesentlich, denn man vernachlässigt Retardierungseffekte, die aus der Tatsache folgen, dass wir in die Vergangenheit sehen, wenn wir entfernte Quellen beobachten! Streng genommen beobachten wir Zustände, die zum Zeitpunkt der Lichtemission vorlagen. Ein in (1) verwendetes „gleichzeitiges" Bezugssystem (Index „0") ist daher als Näherung nur für entsprechend kleine Entfernungen zulässig. Auf Quasare (mit $z > 0{,}4$) ist das Hubble-Gesetz nicht anwendbar!

## 2.2 Dopplereffekt und Fluchtbewegung

Interpretiert man die Rotverschiebung als Dopplereffekt, so ist für kleine $z$ nach der klassischen Dopplerformel die Geschwindigkeit der Quelle durch $v = cz$ gegeben. Aus (1) folgt dann für die Fluchtgeschwindigkeit:

(2) $$v = H_0 d$$

Demnach bewegen sich alle Galaxien radial vom Beobachter weg und zwar umso schneller je weiter sie (momentan) entfernt sind. Der Raum selbst ist in dieser Vorstellung vorgegeben und ohne Einfluss auf die Bewegung (Newtonsche Kosmologie). Kurz gesagt: Die Galaxien bewegen sich, der Raum „ruht".

Gibt es eine speziell-relativistische Verallgemeinerung von (1)? Folgende Idee liegt nahe: Da für beliebig große Geschwindigkeiten ($v < c$) nach der speziellen Relativitätstheorie

(3) $$v = c\frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$$

gilt (speziell-relativistischer Dopplereffekt), wäre als Verallgemeinerung von (1) für beliebige $z$-Werte die Beziehung

(4) $$c\frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} = H_0 d$$

[1]) Der üblicherweise verwendete Ausdruck „Hubble-Konstante" ist inkorrekt, denn H ist zeitlich veränderlich! Alle gegenwärtigen Werte sind durch den Index „*0*" gekennzeichnet.

denkbar. Als Folgerung daraus müssten sich für $z > 0{,}4$ beobachtbare Abweichungen von der linearen Beziehung (1) zeigen. Dies deutet sich in der Tat an. Trotzdem ist (4) nicht sinnvoll! Dazu müsste die Welt im Großen speziell-relativistisch sein (genauer: eine Minkowski-Metrik besitzen). Dies ist aber, wie die Kosmologie zeigt, wohl nicht der Fall. Demnach kann nur die allgemeine Relativitätstheorie (ART) eine sinnvolle Verallgemeinerung von (1) liefern. Die Verwendung von (4) ist daher irreführend. Trotzdem finden sich in der (populären) Literatur immer wieder Fluchtgeschwindigkeiten und Entfernungen die mit (3) und (4) berechnet sind (z.B. in SuW 11/1983, S. 564 und 1/1984, S. 52). Oft wird auch aus (1) $d$ für große $z$ berechnet und (3) liefert dann die „Fluchtgeschwindigkeit"! Nach der ART ist im Großen das „Gravitationsfeld" (des Universums) fiir die Rotverschiebung verantwortlich. Es ist daher weder nützlich noch korrekt, die beobachtete Frequenzverschiebung des Lichtes weit entfernter Quellen als Folge eines speziell-relativistischen Dopplereffekts zu interpretieren. Gleichung (3) ist nur bei − kosmologisch gesehen − kleinen Entfernungen zwischen Quelle und Beobachter anwendbar [2]), z.B. dann, wenn man Quasare (wie z.B. Halton Arp) als lokale Phänomene deutet.

### 2.3 Der allgemein-relativistische Ansatz

In der ART geht man von einer homogenen, isotropen Welt aus. Die daraus resultierende Raumstruktur wird durch eine Robertson-Walker-Metrik beschrieben (Weinberg 1972). Es ergibt sich das Modell eines expandierenden Universums, das geschlossen (elliptisch) oder unendlich (parabolisch oder hyperbolisch) sein kann. Die Expansion wird durch einen Skalenfaktor R(t), den (Krümmungs-)Radius des Universums, beschrieben. Da die Gravitation die Expansion bremst, ist neben der Expansionsgeschwindigkeit (beschrieben durch den Hubble-Parameter $H$) auch der Verzögerungsparameter q wichtig. Eine Messung der gegenwärtigen Werte ($H_0$, $q_0$) erlaubt zu entscheiden, welches Weltmodell realisiert ist (siehe Sandage 1970). $R(t)$ definiert die Rotverschiebung $z$: Sendet eine Quelle Licht zur Zeit $t$ aus, das zur Zeit $t_0$ den Beobachter erreicht, so hängt z nach

$$(5) \qquad 1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t)}$$

vom Verhältnis der jeweiligen Weltradien ab. Dies ist die allgemeinste Formulierung des Hubble-Gesetzes, dessen Interpretation jetzt lautet: Die Galaxien „ruhen" (bis auf Pekuliarbewegungen), der Raum selbst expandiert!

### 2.4 Die Definition der „Entfernung"

Was versteht man nun unter der Entfernung $d$ zwischen Beobachter und Quelle? Da $d$ im Gegensatz zu $z$ keine Messgröße ist, muss $d$ geeignet definiert werden. In der ART sind ja Raum und Zeit nicht vorgegeben, sondern in einer „Wechselwirkung" mit der Materie. Daher sind alle Maßstäbe von der jeweiligen Materieverteilung abhängig. Die Entfernung hängt somit außer von z auch vom Weltmodell und damit von $H$ und $q$ ab. Wie nicht anders zu erwarten lässt sich so zeigen, dass das experimentelle Hubble-Gesetz (1) als „erste Näherung" aus der ART folgt.

Die Definition der „Entfernung" hängt davon ab, welche entfernungsabhängige Eigenschaft der Quelle benutzt wird (siehe Sandage 1975). Die Leuchtkraft-Entfernung $d_L$ („luminosity distance"), die auch in (1) gemeint ist, folgt aus der Tatsache, dass die scheinbare Leuchtkraft einer Quelle proportional zu $1/d_L$ abnimmt. Die Eigenbewegungsentfernung $d_M$ („proper motion distance") benutzt die Abhängigkeit der beobachteten Eigenbewegung vom Abstand zur Quelle (proportional zu $1/d_M$), wenn Objekte mit gleicher transversaler Geschwindigkeit verglichen werden. In Analogie dazu definiert man die Winkel-durchmesser-Entfernung $d_A$ („angular diameter distance"). Diese Entfernungswerte sind (außer im Grenzfall $z \to 0$) alle verschieden!

Aus der ART folgt (siehe Terrell 1977):

---

[2]) In der ART lässt sich die Rotverschiebung in einen Doppleranteil und einen gravitativen Anteil zerlegen (siehe Ellis 1971).

(6) $$d_L = \frac{c}{H_0} A(z) \qquad \text{und damit} \quad d_M = \frac{d_L}{1+z}, \quad d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

wobei

(7) $$A(z) = z\left\{1 + \frac{(1-q_0)z}{1+q_0 z + \sqrt{1+2q_0 z}}\right\}$$

ist. Bis zur zweiten Ordnung in $z$ ergibt sich daraus für $d_L$:

(8) $$H_0 d_L = cz\left\{1 + \frac{1}{2}(1-q_0)z\right\}$$

Im Grenzfall $z \to 0$ fällt der Summand ½ $(1 - q_0)\, z$ weg und es ergibt sich (wie erwartet):

(9) $$cz = H_0 d$$

Der Index „$L$" ist weggelassen, da jetzt $d_L = d_M = d_A$. Interessant sind noch die Grenzfälle $z \to \infty$. Hier muss man die Fälle $q_0 = 0$ (konstante Expansion) und $q_0 \neq 0$ unterscheiden. Aus (6) und (7) ergibt sich:

(10)

| | $q_0 = 0$ | $q_0 \neq 0$ |
|---|---|---|
| $d_A \to$ | $\frac{1}{2}\frac{c}{H_0}$ | 0 [3]) |
| $d_M \to$ | $\infty$ | $\frac{1}{2}\frac{c}{H_0}$ |
| $d_L \to$ | $\infty$ | $\infty$ |

Im Katalog ist $d_M$ angegeben, wobei $H_0$ = 75 (km/s)/Mpc und $q_0$ = 0,1 angenommen ist (hyperbolisches Universum). Mit (6) lassen sich daraus $d_L$ und $d_A$ leicht berechnen: $d_L = (1+z)\, d_M$, $d_A = d_M / (1+z)$.

### 2.4 Die absolute Helligkeit

Die absoluten Helligkeiten ergeben sich definitionsgemäß aus $d_L$ nach der Standardbeziehung

(11) $$m - M = 5 \log d_L - 5 \qquad \text{mit } d_L = 4 \cdot 10^{10} A(z) \text{ pc}.$$

Die Beziehung (11) gilt nur für bolometrische Helligkeiten. Da stets in einem bestimmten Spektralbereich gemessen wird (U, B oder V) muss (11) korrigiert werden, denn die Rotverschiebung verändert die Wellenlängenskala sowie die Intensitätsverteilung im Spektrum („K-Effekt"). Aus (11) folgt dann schließlich

[3]) Fiir $q_0 \neq 0$ hat die Funktion $d_A(z)$ ein Maximum. Für größere $z$ nimmt $d_A$ ab, die Lichtstrahlen werden „refokussiert" (Ellis 1971).

$$M = m - 5\log A(z) - 43{,}09 + K \tag{12}$$

mit dem K-Faktor (Schmidt u. Green 1983):

$$K = 0{,}45z - 0{,}07z^2 \tag{13}$$

Da viele Helligkeitswerte ($m$) nur auf Schätzungen beruhen, sind die mit (12) und (13) berechneten M-Werte im Katalog nur als „Orientierungswerte" zu verstehen. Vorsicht auch beim Vergleich mit anderen Literaturwerten (was auch für „Entfernungen" gilt!), denn die Wahl von $H_0$ und $q_0$ sowie Spektralbereich und K-Faktor (oder weitere Korrekturen, wie interstellare Absorption) beeinflussen die Werte!

**2.5 Lichtlaufzeit und Horizontdistanz**

Die Lichtlaufzeit ist nicht einfach Entfernung/Lichtgeschwindigkeit! Sie folgt aus (5) und ist offenbar durch $\tau = t_0 - t$ gegeben. Eine explizite Berechnung ergibt (nach Sandage 1961):

$$\tau = \tau_0 \left\{ y_0 - y_1 + \ln \frac{x_1 + y_1}{x_0 + y_0} \right\} \tag{15}$$

mit

$$\tau_0 = \frac{q_0}{H_0} \frac{1}{(1-2q_0)^{\frac{3}{2}}} \tag{16}$$

Hier ist $\tau_0 = 1{,}82 \cdot 10^9$ Jahre. Die Größen $x_0$, $x_1$, $y_0$ und $y_1$ sind definiert durch:

$$x_0 = \frac{1-q_0}{q_0} \qquad y_0 = \sqrt{x_0^2 - 1} \tag{17}$$

$$x_1 = \frac{z + x_0}{z+1} \qquad y_1 = \sqrt{x_1^2 - 1}$$

Unseren Beobachtungen ist nur der Teil des Universums zugänglich, dessen Licht uns seit dem Urknall schon erreicht hat. Dieser visuell erfassbare Raum umgibt jeden Beobachter als Kugel mit der Horizontdistanz d als Radius. Für offene Universen ($0 < q_0 < ½$) ist

$$d_H = \frac{c}{H_0} \frac{x_0 + y_0}{\sqrt{1-2q_0}} \tag{18}$$

hier: $d_H = 12912 Mpc$

**Literatur**


Ellis, G. F. R., 1971, in: Sachs, R. K. (Hrsg.), *General Relativity and Cosmology*, Academic Press
Sandage, A., 1961, Astrophys. J. 134, 916
Sandage, A., 1970, Phys. Tod., Heft 2 (Februar), S. 34
Sandage, A., 1975, in: Sandage, A., et al. (Hrsg.), *Galaxies and the Universe*, Univ. of Chicago Press
Schmidt, M., Green, R. F., 1983, Astrophys. J. 269, 352
Terrell, J., 1977, Am. J. Phys. 45, 869
Voigt, H. H., 1980, *Abriss der Astronomie*, Bibl. Inst., Mannheim
Weinberg, S., 1972, *Gravitation and Cosmology*, Wiley & Sons, New York